

AUFGABEN 10: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Zur Erinnerung: Eine nach unten (oben) gerichtete Wohlordnung auf einer Menge X ist eine totale Ordnung, bei der jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes (größtes) Element bezüglich dieser Ordnung hat.

Sei X eine total geordnete Menge, welche nach unten und oben wohlgeordnet ist. Zeigen Sie, dass X endlich ist.

Aufgabe 2. Geben Sie auf \mathbb{Q} eine Ordnung an so, dass \mathbb{Q} nach unten wohlgeordnet ist.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Definiere

$$\begin{aligned}\Delta: \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) &\rightarrow \mathfrak{P}(X), \Delta(A, B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \\ \cap: \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) &\rightarrow \mathfrak{P}(X), \cap(A, B) = A \cap B.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(X), \Delta, \cap)$ ein Ring mit Eins ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$. Für $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ definiere eine Addition $+$ und eine Multiplikation $*$ via

$$\begin{aligned}+: \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +(f, g)(x) = f(x) + g(x), \\ *: \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, *(f, g)(x) = \sum_{ab=x} f(a)g(b),\end{aligned}$$

wobei die Summe über alle Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ läuft mit $ab = x$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +, *)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Abgabe: 25.Nov.2019 vor der Vorlesung. **Rückgabe:** 28.Nov.2019 in den Übungen.