AUFGABEN 11: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch angeordnet, falls es zu $a, b \in K$ mit $a > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $b < na$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ mit der natürlichen Ordnung archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass ein angeordneter Körper K genau dann archimedisch ist, wenn $\{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset K$ nicht nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 3. Zeigne Sie: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ ein Körper ist. Hierbei ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ eine reelle Zahl mit $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$, die Addition ist

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

und die Multiplikation ist

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

Abgabe: 09.Dez.2019 vor der Vorlesung. **Rückgabe**: 12.Dez.2019 in den Übungen.